

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分类

带几何结构的
代数对象

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

华侨大学 数学科学学院

December 3, 2016 at

福州大学

目录

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分类

带几何结构的
代数对象

- 1 《高等代数》的框架
- 2 五个基本对象的结构理论
- 3 方阵的相似分类
- 4 带几何结构的代数对象

高等代数的内容和目标

代数学是研究代数对象的结构理论和表示理论的一门学科
(引自林亚南教授编著的《高等代数》前言)。

关于《高等代
数》的一些教
学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

高等代数的内容和目标

关于《高等代数》
的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

代数学是研究代数对象的结构理论和表示理论的一门学科（引自林亚南教授编著的《高等代数》前言）。

《高等代数》范围的结构理论以分解、分类两种形式展示出来。分解、分类不宜太粗，也不宜太细，以能解决我们关心的实际问题为佳。

高等代数的内容和目标

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》的框架

五个基本对象的结构理论

方阵的相似分类

带几何结构的代数对象

代数学是研究代数对象的结构理论和表示理论的一门学科（引自林亚南教授编著的《高等代数》前言）。

《高等代数》范围的结构理论以分解、分类两种形式展示出来。分解、分类不宜太粗，也不宜太细，以能解决我们关心的实际问题为佳。

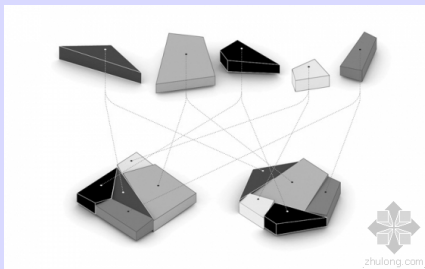


Figure: 分解、分类

高等代数的内容和目标

关于《高等代数》
的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

表示理论更多的是一种解决问题的思路和方法。为了认识清楚代数对象的结构，我们需要借用一些熟悉的对象为模板，来获得未知对象的某些信息。

高等代数的内容和目标

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》的框架

五个基本对象的结构理论

方阵的相似分类

带几何结构的代数对象

表示理论更多的是一种解决问题的思路和方法。为了认识清楚代数对象的结构，我们需要借用一些熟悉的对象为模板，来获得未知对象的某些信息。

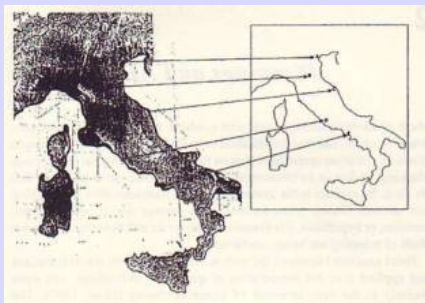


Figure: 表示

课程框架

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分类

带几何结构的
代数对象

基于研究代数对象的结构这个目标，《高等代数》课程框架分成三个层次：

1、五个基本对象的结构理论：矩阵、线性方程组、线性空间、线性映射、多项式。

课程框架

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分类

带几何结构的
代数对象

基于研究代数对象的结构这个目标，《高等代数》课程框架分成三个层次：

1、五个基本对象的结构理论：矩阵、线性方程组、线性空间、线性映射、多项式。其中矩阵、线性方程组、多项式比较具体，线性空间和线性映射比较抽象。

课程框架

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》的框架

五个基本对象的结构理论

方阵的相似分类

带几何结构的代数对象

基于研究代数对象的结构这个目标，《高等代数》课程框架分成三个层次：

1、五个基本对象的结构理论：矩阵、线性方程组、线性空间、线性映射、多项式。其中矩阵、线性方程组、多项式比较具体，线性空间和线性映射比较抽象。

2、方阵的相似分类（包含林亚南教授编著的《高等代数》的第六、七两章）。

课程框架

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

基于研究代数对象的结构这个目标，《高等代数》课程框架分成三个层次：

1、五个基本对象的结构理论：矩阵、线性方程组、线性空间、线性映射、多项式。其中矩阵、线性方程组、多项式比较具体，线性空间和线性映射比较抽象。

2、方阵的相似分类（包含林亚南教授编著的《高等代数》的第六、七两章）。

3、带几何结构的代数对象，可以看着是纯代数知识的应用（包含欧式空间、二次型两章）。突出几何是数学产生和发展的基础和背景这一感觉。

矩阵

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

矩阵围绕行列式、秩这两个高级概念展开。

矩阵

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分类

带几何结构的
代数对象

矩阵围绕行列式、秩这两个高级概念展开。

行列式的核心是如何用低阶的、特殊的矩阵的行列式计算一个一般方阵的行列式，因此按一行一列（或多行多列）展开的Laplace定理恰好展示了这种分解。

矩阵

关于《高等代数》
的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

矩阵围绕行列式、秩这两个高级概念展开。

行列式的核心是如何用低阶的、特殊的矩阵的行列式计算一个一般方阵的行列式，因此按一行一列（或多行多列）展开的Laplace定理恰好展示了这种分解。

秩在这一章可以通过列向量的线性表出，或者行列子式来定义，通过给出秩是初等变换下的不变量引出一个分解：可逆矩阵分解为初等矩阵的乘积；一个分类：矩阵的相抵分类。

线性方程组

关于《高等代数》
的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

线性方程组这一章围绕线性方程组的解的结构定理展开。

基础解系包含的向量个数=未知数个数-系数矩阵的秩。

这是一个具有分解性质的结论。

线性空间

关于《高等代数》
的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象的
结构理论

方阵的相似分类

带几何结构的
代数对象

线性空间这一章围绕基和直和两个概念展开。

基起到一个坐标系的作用，而直和是从线性空间的子、交、并、补的关系发展而来，核心是展示出维数定理

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

线性空间

关于《高等代数》
的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象的
结构理论

方阵的相似分类

带几何结构的
代数对象

线性空间这一章围绕基和直和两个概念展开。

基起到一个坐标系的作用，而直和是从线性空间的子、交、并、补的关系发展而来，核心是展示出维数定理

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

基和（直）和同样是展示的分解性质。

线性映射

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

线性映射这一章展示如何用表示的思想来认识抽象的对象。

线性映射

关于《高等代数》
的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象的
结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

线性映射这一章展示如何用表示的思想来认识抽象的对象。

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)A_{m \times n}$$

称 A 是线性映射 φ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 下的
(表示)矩阵。

线性映射

关于《高等代数》
的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象的
结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

线性映射这一章展示如何用表示的思想来认识抽象的对象。

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)A_{m \times n}$$

称 A 是线性映射 φ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 下的
(表示)矩阵。

通过这一等式把抽象的线性映射和实实在在的矩阵联系了起来。然后展示三个分类：相抵，更细的相似分类，线性空间的同构；

线性映射

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分类

带几何结构的
代数对象

线性映射这一章展示如何用表示的思想来认识抽象的对象。

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)A_{m \times n}$$

称 A 是线性映射 φ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 和基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 下的（表示）矩阵。

通过这一等式把抽象的线性映射和实实在在的矩阵联系起来。然后展示三个分类：相抵，更细的相似分类，线性空间的同构；一个分解：像与核的维数定理，在不变子空间上的限制。

多项式

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

多项式这一章围绕唯一分解定理这个结构性质的结论展开。

有必要在这里介绍群和环的定义，从而发现多项式的性质更像整数，而不是数域及其推广概念——矩阵。

多项式

关于《高等代数》
的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

多项式这一章围绕唯一分解定理这个结构性质的结论展开。

有必要在这里介绍群和环的定义，从而发现多项式的性质更像整数，而不是数域及其推广概念——矩阵。这样引入带余除法、公因子等概念就比较自然（表示的思想），最终给出素数的对应物——不可约多项式。

多项式

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分类

带几何结构的
代数对象

多项式这一章围绕唯一分解定理这个结构性质的结论展开。

有必要在这里介绍群和环的定义，从而发现多项式的性质更像整数，而不是数域及其推广概念——矩阵。这样引入带余除法、公因子等概念就比较自然（表示的思想），最终给出素数的对应物——不可约多项式。

然后分别在复数域、实数域、有理数域上实现唯一分解定理，利用有理数域不可约多项式的特点强化唯一分解定理的算法缺陷。

可对角化

关于《高等代数》
的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

先找最简单的矩阵（数量矩阵、对角矩阵）来看相似分类需要的工具。

可对角化

关于《高等代数》
的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

先找最简单的矩阵（数量矩阵、对角矩阵）来看相似分类需要的工具。

从方阵相似于一个对角矩阵的定义引出特征值和特征向量，特征多项式。并在第一节给出

定理

设 $A \in M_n(F)$ ，则 A 可对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量。

可对角化

关于《高等代
数》的一些教
学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

先找最简单的矩阵（数量矩阵、对角矩阵）来看相似分类需要的工具。

从方阵相似于一个对角矩阵的定义引出特征值和特征向量，特征多项式。并在第一节给出

定理

设 $A \in M_n(F)$ ，则 A 可对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量。

然后继续展开这一话题，通过考察特征子空间、特征多项式给出更多可对角化的充分必要条件。最后通过分析特征多项式引入极小多项式：零化多项式、Schur引理、Cayley-Hamilton定理。

相似标准形

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

在引入 λ -矩阵这一概念时，可以先形式的看着数域上的矩阵 $M_n(F)$ 推广到环上的矩阵 $M_n(R)$ ，特别地，令 $R = F[x]$ 。

相似标准形

关于《高等代
数》的一些教
学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

在引入 λ -矩阵这一概念时，可以先形式的看着数域上的矩阵 $M_n(F)$ 推广到环上的矩阵 $M_n(R)$ ，特别地，令 $R = F[x]$ 。

然后按教材顺序推进到第六节时，根子空间分解定理可以先给出针对任意数域上的空间第一分解定理：

定理

设 $\varphi: V \rightarrow V$ ，其中 V 是数域 F 上的 n -维线性空间，若 $f(x) = f_1(x)f_2(x) \in F[x]$ ，且 $(f_1, f_2) = 1$ ，则

$$\text{Ker } f(\varphi) = \text{Ker } f_1(\varphi) \oplus \text{Ker } f_2(\varphi).$$

相似标准形

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分类

带几何结构的
代数对象

在引入 λ -矩阵这一概念时，可以先形式的看着数域上的矩阵 $M_n(F)$ 推广到环上的矩阵 $M_n(R)$ ，特别地，令 $R = F[x]$ 。

然后按教材顺序推进到第六节时，根子空间分解定理可以先给出针对任意数域上的空间第一分解定理：

定理

设 $\varphi: V \rightarrow V$ ，其中 V 是数域 F 上的 n -维线性空间，若 $f(x) = f_1(x)f_2(x) \in F[x]$ ，且 $(f_1, f_2) = 1$ ，则

$$\text{Ker } f(\varphi) = \text{Ker } f_1(\varphi) \oplus \text{Ker } f_2(\varphi).$$

这样可以在任意数域上强化矩阵可对角化的一个充分必要条件：极小多项式可以分解为不同的一次因式的乘积。

欧式空间和二次型

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

这一部分展示具有几何性质的代数对象的结构：欧式空间同构，实对称矩阵可正交对角化，正交矩阵，二次曲线、曲面的分类，矩阵合同分类。

欧式空间和二次型

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分类

带几何结构的
代数对象

这一部分展示具有几何性质的代数对象的结构：欧式空间同构，实对称矩阵可正交对角化，正交矩阵，二次曲线、曲面的分类，矩阵合同分类。

几个可以突出的知识点：通过Schmidt正交化给出可逆矩阵的LU分解，并介绍其算法意义；二次型化为标准形的方法中推荐使用配方法。

欧式空间和二次型

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分类

带几何结构的
代数对象

这一部分展示具有几何性质的代数对象的结构：欧式空间同构，实对称矩阵可正交对角化，正交矩阵，二次曲线、曲面的分类，矩阵合同分类。

几个可以突出的知识点：通过Schmidt正交化给出可逆矩阵的LU分解，并介绍其算法意义；二次型化为标准形的方法中推荐使用配方法。

这一部分展示几何是数学产生和发展的基础和背景，应用代数的概念总结我们到目前为止学过的所有几何，适当介绍Klein的埃尔朗根纲领：

欧式空间和二次型

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

这一部分展示具有几何性质的代数对象的结构：欧式空间同构，实对称矩阵可正交对角化，正交矩阵，二次曲线、曲面的分类，矩阵合同分类。

几个可以突出的知识点：通过Schmidt正交化给出可逆矩阵的LU分解，并介绍其算法意义；二次型化为标准形的方法中推荐使用配方法。

这一部分展示几何是数学产生和发展的基础和背景，应用代数的概念总结我们到目前为止学过的所有几何，适当介绍Klein的埃尔朗根纲领：

几何就是研究空间物体在某个变换群下的不变量。

关于《高等代数》的一些教学体会

肖占魁

目录

《高等代数》
的框架

五个基本对象
的结构理论

方阵的相似分
类

带几何结构的
代数对象

谢谢！